型付きラムダ計算の諸性質

Ziphil Aleshlas

2016 年 9 月 21 日

目次

1.　初めに

ラムダ計算は，関数を論理学的に扱うための理論である．しかし，一言で「関数」と言っても，その性質は多様である．例えば，圏論では関数 (射) のもつ性質である合成や普遍性に注目して議論が進められる．一方でラムダ計算では，関数への引数の適用やその結果の評価という面を抽象化したものである．

ラムダ計算の理論は，1932 年に Church によって提案され，その後 Kleene や Rosser によってその性質が示され洗練されていった．それ以降，ラムダ計算は他の分野 (特に論理学や計算機科学) の発展に大きく貢献してきた．例えば，Church は 1936 年に一階述語論理の決定可能性問題をラムダ計算を用いて解いている．また，LISP や Haskell などの言語に代表されるような関数型プログラミング言語の基盤にもなっている．

初めに Church によって提唱された理論は型なしラムダ計算と呼ばれ，型を考えないものであった．そこに型情報を付加して作られた理論が型付きラムダ計算である．型を考えることの利点の 1 つとして，例えば型 A の引数をとる関数に別の型 B の引数を渡すなどの誤りを，数学的に検出できるようになることがある．これにより，型付きラムダ計算をもとにしたプログラミング言語では，プログラムの誤りをいくらか事前に検出できるようになり，安全性が高まる．

この文書では，型付きラムダ計算について述べる．本来なら，型付きラムダ計算の議論をする前に型なしラムダ計算の理論やその結果について述べるべきだろうが，ここでは型付きラムダ計算をいきなり導入する形式をとった．議論の進め方は，主に Barendregt[2] を参照した．しばしば型なしラムダ計算の結果を利用したが，それは Barendregt[1] を参照した．

この文書の構成として，まず，第 2 節で型付きラムダ計算の議論を行うのに必要不可欠な言葉の準備を行う．続く第 3 節は，ラムダ項の様々な性質を列挙する形で述べる．第 3 節の各項はそれぞれ独立に読むことができる．

2.　準備

2.1.　型

定義 1.　空でない集合 $\mathbb{A}$ を用意し，この元を**原始型** (atomic type) という．

定義 2.　原始型の集合 $\mathbb{A}$ に対し，集合 $\mathbb{T}$ を以下によって再帰的に定義する．

$$a \in \mathbb{A} \implies a \in \mathbb{T}$$
$$\sigma, \tau \in \mathbb{T} \implies (\sigma \to \tau) \in \mathbb{T}$$

このとき，$\mathbb{T}$ の元を**型** (type) という．

以下では，$a, b, c, \cdots$ で任意の原始型を表し，$\sigma, \tau, \rho, \cdots$ で任意の型を表すものとする．

例えば,

$$a \qquad a \to b \qquad c \to ((a \to a) \to b) \qquad (a \to a) \to ((a \to a) \to a)$$

などが型である.

2 つの型 σ, τ において，原始型と $\to$ の並びがカッコの付き方も含めて全く同じである場合，$\sigma \equiv \tau$ と表す.

カッコが不用意に多くなるのを防ぐため，カッコを省略した場合は右結合であるとして解釈する. 例えば,

$$\sigma \to \tau \to \rho \to \theta \equiv \sigma \to (\tau \to (\rho \to \theta))$$

とする.

1 つの原始型のみを考えるときの型全体は $\mathbb{T}^0$ と書かれる．このとき，唯一の原始型は 0 で表されることが多い．また，加算無限個の原始型を考えるときの型全体は $\mathbb{T}^\infty$ と書かれる．型付きラムダ計算の理論では，主に $\mathbb{T}^0$ もしくは $\mathbb{T}^\infty$ 上で議論することが多い.

2.2. ラムダ項

以下では，型全体の集合 $\mathbb{T}$ を 1 つとって固定する.

定義 3. 型 σ に対し，可算無限集合

$$\mathrm{Var}(\sigma) = \{x^\sigma,\ y^\sigma,\ z^\sigma, \cdots\}$$

を用意する．さらに,

$$\mathrm{Var} = \bigsqcup_{\sigma \in \mathbb{T}} \mathrm{Var}(\sigma)$$

とおき，Var の元を**変項** (variable) という.

この定義により，全ての変項には唯一の型が対応付けられる．変項の型は，x^σ や $y^{a\to b}$ のように，文字の左上に型を書く形で明記する.

定義 4. 型 σ に対し，集合 $\Lambda_\to(\sigma)$ を以下によって再帰的に定義する.

$$\begin{aligned} x^\sigma \in \mathrm{Var}(\sigma) &\implies x^\sigma \in \Lambda_\to(\sigma) \\ M \in \Lambda_\to(\sigma \to \tau) \text{ AND } N \in \Lambda_\to(\sigma) &\implies (MN) \in \Lambda_\to(\tau) \\ x^\sigma \in \mathrm{Var}(\sigma) \text{ AND } M \in \Lambda_\to(\tau) &\implies (\lambda x^\sigma.\, M) \in \Lambda_\to(\sigma \to \tau) \end{aligned}$$

このとき，$\Lambda_\to(\sigma)$ の元を型 σ の**ラムダ項** (lambda term) という．また，型 σ の**具体項** (inhabitant) ともいわれる[*1].

以下では，x^σ, y^τ, z^ρ, $\cdots$ で任意の変項を表し，M, N, L, $\cdots$ で任意のラムダ項を表すものとする．

例えば,

$$
\begin{aligned}
x^\sigma &\in \Lambda_\rightarrow(\sigma) \\
x^{a\rightarrow b} y^a &\in \Lambda_\rightarrow(b) \\
\lambda x^{a\rightarrow a\rightarrow b}.\, x^{a\rightarrow a\rightarrow b} y^a &\in \Lambda_\rightarrow((a\rightarrow a\rightarrow b)\rightarrow a\rightarrow b) \\
\lambda x^{b\rightarrow c}.\, (\lambda y^{a\rightarrow b}.\, x^{b\rightarrow c}(y^{a\rightarrow b} z^a)) &\in \Lambda_\rightarrow((b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow b)\rightarrow c)
\end{aligned}
$$

などがラムダ項である．

2 つのラムダ項 M, N において，変項や λ の並びがカッコの付き方も含めて全く同じである場合，$M \equiv N$ と表す．

カッコが不用意に多くなるのを防ぐため，ラムダ項については，カッコを省略した場合は左結合であるとして解釈する．例えば,

$$
\begin{aligned}
xyzw &\equiv ((xy)z)w \\
\lambda x.\, yz(\lambda w.\, zw) &\equiv \lambda x.\, y(z(\lambda w.\, zw))
\end{aligned}
$$

である[*2]．さらに，式が煩雑になるのを防ぐため,

$$\lambda x_1 x_2 \cdots x_n.\, M \equiv \lambda x_1.\, (\lambda x_2.\, (\cdots(\lambda x_n.\, M)))$$

と略記することにする．この略記においては，ピリオドの位置に十分注意すること．例えば，$\lambda xy.\, M$ と $\lambda x.\, yM$ は異なるラムダ式である．

なお，定義の逆も成り立つことに注意すること．例えば，MN という形のラムダ項が型 τ であるなら，ある型 σ に対して，M は型 $\sigma \rightarrow \tau$ でなければならず，N は型 σ でなければならない．同様に，$\lambda x^\sigma.\, M$ という形のラムダ項が型 τ であるなら，ある型 ρ に対して，$\tau \equiv \sigma \rightarrow \rho$ かつ P は型 ρ でなければならない．

さて，ここまで型やラムダ項は単なる記号列でしかなかったが，以下のようにイメージすると何を意図してこれまでのような定義をしたか分かりやすいであろう．

まず，ラムダ項 $\lambda x.\, M$ は，x を引数にとり M を返すような関数であると意味付けされる．例えば $f(x) = x + 5$ で定義される関数は，ラムダ計算の世界では $\lambda x.\, (x + 5)$ のように表されることになる[*3]．また，2 つのラムダ項の並び MN は，M という関数に N を施した値であると解釈される．従って，上の関数 f に対して 3 を施した値である $f(3)$ は，ラムダ計算の世界では $(\lambda x.\, (x + 5))3$ と表わされることになる．

[*1] ラムダ項に型を対応させる方法はこの定義によるもの以外にもある．この定義は Church 版と呼ばれているもので，他に Curry 版や de Bruijn 版などがある．

[*2] ここでは変項の型は重要ではないので省略した．今後も，型が重要でない場合は型を明示しない場合がある．

[*3] ラムダ項には + や 5 などの記号は定義されていないので，厳密には $\lambda x.\, (x + 5)$ などというラムダ項を考えることはできないが，ここではイメージの話をしているだけなので，あまり細かいことには気にしないでほしい．

関数には 1 変数だけではなく 2 変数や 3 変数のものもあるが，関数を返す関数を考えることにより，1 変数関数のみで多変数関数を表現することができる．例として，2 変数関数 $f(x, y) = x + y + 5$ を考える．x を固定して関数 $g_x(y) = f(x, y)$ を作ると，これは 1 変数関数である．さらに，x を引数にとって g_x を返す関数 $\tilde{f}$ を作ると，これも 1 変数関数である．f と $\tilde{f}$ は，$f(x, y) = (\tilde{f}(x))(y)$ という関係により 1 対 1 に対応しているので，f の代わりに $\tilde{f}$ を考えても良い[*4]．$\tilde{f}$ であれば，1 変数関数なのですでに述べたようにラムダ項で表現することができる．具体的には，g_x が $\lambda y.\, (x + y + 5)$ で表現できることから，$\tilde{f}$ は $\lambda x.\, g_x$ すなわち $\lambda x.\, (\lambda y.\, (x + y + 5))$ となる．

$\sigma \to \tau$ という型は，型 σ の引数をとって型 τ の値を返すような関数と対応する．例えば，$\lambda x^\sigma.\, y^\tau$ は型 $\sigma \to \tau$ のラムダ項であるが，ここに型 σ の変項 z^σ を施した $(\lambda x^\sigma.\, y^\tau)z^\sigma$ は上の定義から型 τ のラムダ式である．これにより，上のラムダ項の型の定義が合理的だということが分かるであろう．

2.3. 自由変項と部分項

ラムダ項に現れる変項を 2 つに分類する．

定義 5. ラムダ項 M に対し，変項から成る集合 $\mathrm{FV}(M)$ を以下によって再帰的に定義する．

$$\begin{aligned}\mathrm{FV}(x) &= \{x\}\\ \mathrm{FV}(MN) &= \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)\\ \mathrm{FV}(\lambda x.\, M) &= \mathrm{FV}(M) \setminus \{x\}\end{aligned}$$

このとき，$\mathrm{FV}(M)$ の元を，M の**自由変項** (free variable) という．また，M の表示に出てくる変項のうち $\mathrm{FV}(M)$ に属さないものは，M の**束縛変項** (bound variable) という．

定義 6. ラムダ項 M が $\mathrm{FV}(M) = \emptyset$ を満たすとき，M は**閉じている** (closed) という．また，型 σ のラムダ項のうち閉じているもの全体を $\Lambda^{\emptyset}_{\to}(\sigma)$ で表す．

大雑把に言えば，M の束縛変項とは，M に現れる変項 x のうちで λx という形になっていないもの全体である．例えば，

$$\begin{aligned}\mathrm{FV}(xyz) &= \{x, y, z\}\\ \mathrm{FV}(\lambda xy.\, yxx) &= \emptyset\\ \mathrm{FV}((\lambda x.\, xy)(\lambda y.\, y)) &= \{y\}\end{aligned}$$

であり，これより $\lambda xy.\, yxx$ は閉じたラムダ項である．また，この 3 番目の例には注意が必要である．$\lambda y.\, y$ においては y は束縛変項だが，$\lambda x.\, xy$ に y が自由変項として出現しているため，全体として y は自由変項である．

定義 7. ラムダ項 M に対して $\mathrm{FV}(M) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ とおくとき，$\lambda x_1 \cdots x_n.\, M$ を M の**閉包** (closure) という．

[*4] ここまでの議論は，要するに集合から成る圏が Cartesian 閉であるということを言っているにすぎない．

閉包はかならず閉じたラムダ項になる．また，自由変項を並べる順番は任意なので，閉包は一意に定まるわけではない．

定義 8. 型 σ が $\Lambda^{\emptyset}_{\to}(\sigma) \neq \emptyset$ を満たすとき，σ は**具体** (inhabited) であるという．

定義 9. ラムダ項 M に対し，ラムダ項から成る集合 $\mathrm{Sub}(M)$ を以下によって再帰的に定義する．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sub}(x) &= \{x\} \\
\mathrm{Sub}(MN) &= \mathrm{Sub}(M) \cup \mathrm{Sub}(N) \cup \{MN\} \\
\mathrm{Sub}(\lambda x.\, M) &= \mathrm{Sub}(M) \cup \{\lambda x.\, M\}
\end{aligned}$$

このとき，$\mathrm{Sub}(M)$ の元を M の**部分項** (subterm) という．

例えば，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sub}(xyz) &= \{x,\ y,\ z,\ xy,\ xyz\} \\
\mathrm{Sub}(\lambda xy.\, yxx) &= \{y,\ x,\ yx,\ yxx,\ \lambda y.\, yxx,\ \lambda xy.\, yxx\}
\end{aligned}$$

である．$xyz \equiv (xy)z$ であるから $yz \notin \mathrm{Sub}(xyz)$ である．

ラムダ項と部分項の定義から分かるように，あるラムダ項の部分項は全て正しく型付けられている．したがって，$(\lambda x^a.\, x^a)^{a \to a}$ のように，変項だけではなく部分項にも型を明記することがある．

定義 10. ラムダ項 M に部分項として P が含まれているとする．このとき，M に含まれる P のそれぞれを，その位置を区別して**出現** (occurrence) という．

部分項と出現の違いは，同じ形の部分項が複数含まれている場合に生じる．例えば，

$$M \equiv z(\lambda x.\, xy)(\lambda x.\, xy)$$

は部分項 $P \equiv \lambda x.\, xy$ をもつが，出現 P と言ったときには 2 ヶ所の P をそれぞれ区別する．したがって，M の部分項 P を w に置き換えたものは zww のことを言うが，M の 1 番目の出現 P を w に置き変えたものは $zw(\lambda x.\, xy)$ になる．

2.4. 代入と変項変換規則

定義 11. ラムダ項 M, P と変項 x に対し，x と P の型が同じであるとき，$M[x := P]$ を以下によって再帰的に定義する．

$$\begin{aligned}
x[x := P] &\equiv P && \\
y[x := P] &\equiv y && (y \not\equiv x) \\
(MN)[x := P] &\equiv (M[x := P])(N[x := P]) && \\
(\lambda y.\, M)[x := P] &\equiv \lambda y.\, M[x := P] && (y \not\equiv x,\ y \notin \mathrm{FV}(P))
\end{aligned}$$

このとき，$M[x := P]$ を M の x に P を**代入** (substitute) したラムダ項という．

厳密性を欠くが，$M[x := P]$ とは M に現れる x を P に置き換えたものである．

さて，実はこの定義だけでは不十分で，例えば $(\lambda x.\, M)[x := P]$ などが定義されない．そこで，以下の束縛変項の変換規則を設ける．

定義 12. ラムダ項 M を考える．M の部分項として $\lambda x^\sigma.\, N$ が出現しているとし，N に自由変項としても束縛変項としても現れていない変項 y^σ をとる．ここで，N に含まれる変項 x^σ を全て y^σ で置き換えたものを N' とする．さらに，M の出現 $\lambda x^\sigma.\, N$ を $\lambda y^\sigma.\, N'$ に置き換えて得られるラムダ項を M' とする．このとき，$M \equiv M'$ と約束する．

例えば，

$$\lambda x.\, xy \equiv \lambda z.\, zy$$
$$(\lambda x.\, xz)(\lambda y.\, y(yz)) \equiv (\lambda y.\, yz)(\lambda v.\, v(vz))$$

となる．

この規則により，$(\lambda x^\sigma.\, M)[x^\sigma := P]$ は，M にも P にも含まれない変項 y^σ を用いて $(\lambda y^\sigma.\, M')[x^\sigma := P]$ を考えることで，これを定義することができる．

変換規則が必要な代入の例を挙げておく．

$$\begin{aligned}(\lambda y.\, yx)[x := yz] &\equiv (\lambda v.\, vx)[x := yz] \\ &\equiv \lambda v.\, (vx)[x := yz] \\ &\equiv \lambda v.\, v(yz)\end{aligned}$$

この例では，代入される項に含まれる束縛変項 x が，代入する内容である xz の自由変項であるため，変換規則なしでは書き換えができない．変換規則が必要な別の例としては以下のようなものがある．

$$\begin{aligned}(\lambda x.\, yx)[x := yz] &\equiv (\lambda v.\, yv)[x := yz] \\ &\equiv \lambda v.\, (yv)[x := yz] \\ &\equiv \lambda v.\, yv \\ &\equiv \lambda x.\, yx\end{aligned}$$

これは，束縛変項と代入変項が同じなので，そのままでは代入できない場合である．

さて，今後は議論を不用意に複雑にしないために，$M, N, \cdots$ などとラムダ項を書いた場合，そこに含まれる束縛変数は，そこの議論で用いる自由変項とは異なるものであるように，暗黙的に変項変換してあるものとする．例えば，$M[x := P]$ と書いたら，M の束縛変項には x や P の自由変項が含まれていないと暗黙的に仮定する．

ここまで言及しなかったが，代入により得られるラムダ項が妥当なものかどうかについては何も言及していない．実際は，以下の命題が示すように，代入によって不正な項が出ることはなく，さらに代入前と代入後で型は変化しない．

命題 13. 型 σ のラムダ項 M と型 τ のラムダ項 P を考える．このとき，$M[x^\tau := P]$ は型 σ のラムダ項である．

証明は M の構造に関する帰納法による．これは再帰的に定義された概念に関する証明ではよく用いられる手法なので，ここで詳しく述べておく．

ラムダ項の公理には，まず，

$$T \in \Lambda_{\rightarrow}(\sigma \rightarrow \tau) \text{ AND } U \in \Lambda_{\rightarrow}(\sigma) \implies TU \in \Lambda_{\rightarrow}(\tau)$$

がある．これを以下では Ap と呼ぶことにする．さらに，

$$T \in \Lambda_{\rightarrow}(\tau) \implies \lambda y^{\sigma}.\, T \in \Lambda_{\rightarrow}(\sigma \rightarrow \tau)$$

があり，これは Ab と呼ぶことにする．全てのラムダ項は，この 2 つの公理 (と単独の変項はラムダ項であること) を繰り返し利用することで作られる．例えば，$\lambda x^a.\, y^{(a\rightarrow a)\rightarrow b}(\lambda x^a.\, z^a)$ は型 $a \rightarrow b$ の妥当なラムダ項であるが，これが作られるまでに使われるラムダ項の公理を図式化すると，

$$\begin{tikzcd}
& \lambda x^a.\, y^{(a\rightarrow a)\rightarrow b}(\lambda x^a.\, z^a) \in \Lambda_{\rightarrow}(a \rightarrow b) & \\
& y^{(a\rightarrow a)\rightarrow b}(\lambda x^a.\, z^a) \in \Lambda_{\rightarrow}(b) \arrow[u, Rightarrow, "\mathrm{Ab}"] & \\
y^{(a\rightarrow a)\rightarrow b} \in \Lambda_{\rightarrow}((a \rightarrow a) \rightarrow b) \arrow[ur, Rightarrow, "\mathrm{Ap}"'] & & \lambda x^a.\, z^a \in \Lambda_{\rightarrow}(a \rightarrow a) \arrow[ul, Rightarrow, "\mathrm{Ap}"] \\
& & z^a \in \Lambda_{\rightarrow}(a \rightarrow a) \arrow[u, Rightarrow, "\mathrm{Ab}"]
\end{tikzcd}$$

となる．したがって，ラムダ項 M に関するある性質が成り立つことを証明したいときは，

- 単独の変項 y^{σ} がその性質を満たすことを証明する．
- $T \in \Lambda_{\rightarrow}(\sigma \rightarrow \tau)$ と $U \in \Lambda_{\rightarrow}(\sigma)$ がその性質を満たすと仮定して，$TU \in \Lambda_{\rightarrow}(\tau)$ がその性質を満たすことを示す．
- $T \in \Lambda_{\rightarrow}(\tau)$ がその性質を満たすと仮定して，$\lambda y^{\sigma}.\, T \in \Lambda_{\rightarrow}(\sigma \rightarrow \tau)$ がその性質を満たすことを示す．

という 3 つのことを行えば，帰納的に全てのラムダ項に対してその性質を示したことになる．

では，この帰納法によって命題の証明を行う．

場合 1:　$M \equiv y^{\sigma}$ のとき．$y^{\sigma} \equiv x^{\tau}$ であれば，$\sigma \equiv \tau$ である．代入の定義から $M[x^{\tau} := P] \equiv P$ であり，P の型は σ でもあるから，$M[x^{\tau} := P]$ は型 σ のラムダ項である．$y^{\sigma} \not\equiv x^{\tau}$ であれば，$M[x^{\tau} := P] \equiv M$ なので，これは型 σ のラムダ項である．

場合 2:　$M \equiv TU$ かつ $T \in \Lambda_{\rightarrow}(\sigma \rightarrow \tau), U \in \Lambda_{\rightarrow}(\sigma)$ なるとき．代入の定義から，

$$(TU)[x^{\tau} := P] \equiv (T[x^{\tau} := P])(U[x^{\tau} := P])$$

であるが，帰納法の仮定から $T[x^{\tau} := P]$ は型 $\sigma \rightarrow \tau$ のラムダ項で，$U[x^{\tau} := P]$ は型 σ のラムダ項である．よって，上式とラムダ項の公理 Ap により，$(TU)[x^{\tau} := P]$ は型 σ のラムダ項である．

場合 3:　$M \equiv \lambda y^\sigma. T$ かつ $T \in \Lambda_\to(\tau)$ なるとき．代入の定義から，

$$(\lambda y^\sigma. T)[x^\tau := P] = \lambda y^\sigma. T[x^\tau := P]$$

であり，帰納法の仮定から $T[x^\tau := P]$ は型 τ のラムダ項なので，公理 Ab から $(\lambda y^\sigma. T)[x^\tau := P]$ は型 $\sigma \to \tau$ のラムダ項である．

2.5.　簡約

$f(x) = x + 5$ で定義される関数 f に 3 を施して得られる値 $f(3)$ は，ラムダ計算では $(\lambda x. (x + 5))3$ で表されるのであった．ところで，$f(3) = 3 + 5\ (= 8)$ であるから，ラムダ計算でも $(\lambda x. (x + 5))3$ と $3 + 5$ を紐付ける何らかの規則が必要そうである．それが，この節で定義する β-簡約という概念である．

また，2 つの関数 f, g があるとき，どんな x に対しても $f(x) = g(x)$ が成り立てば f と g は同じ関数であると考えられる．これに対応するのが η-簡約である．

定義 14.　ラムダ項 M を考える．M の部分項に $(\lambda x. P)Q$ という形があるとき，この出現 $(\lambda x. P)Q$ を $P[x := Q]$ に置き換えて得られるラムダ項を N とする．このとき，M は N に β-簡約 (reduce) されるといい，$M \to_\beta N$ で表す．

例えば，

$$\begin{aligned} w^{a\to b}((\lambda x^{a\to a}. x^{a\to a}(x^{a\to a}z^a))(\lambda y^a. y^a)) &\to_\beta w^{a\to b}((\lambda y^a. y^a)((\lambda y^a. y^a)z^a)) \\ &\to_\beta w^{a\to b}((\lambda y^a. y^a)z^a) \\ &\to_\beta w^{a\to b}z^a \end{aligned}$$

である．

前節で述べた暗黙の慣習に注意すること．上の定義では，単に $(\lambda x. P)Q$ を $P[x := Q]$ に置き換えるとだけ述べたが，暗黙的に P の束縛変項には x や Q の自由変項が含まれないものとしている．したがって，

$$(\lambda x^{a\to a}. (\lambda y^{a\to a}. y^{a\to a}(x^{a\to a}z^a)))y^{a\to a} \not\to_\beta \lambda y^{a\to a}. y^{a\to a}(y^{a\to a}z^a)$$

である．

定義 15.　ラムダ項 M を考える．M の部分項に $x \notin \mathrm{FV}(P)$ を満たす $\lambda x. Px$ という形があるとき，この出現 $\lambda x. Px$ を P に置き換えて得られるラムダ項を N とする．このとき，M は N に η-簡約 (reduce) されるといい，$M \to_\eta N$ で表す．

記号をいくつか用意する．

定義 16.　ラムダ項 M に対して β-簡約もしくは η-簡約のどちらか一方を行って N が得られるとき，$M \to_{\beta\eta} N$ と表す．

定義 17. ラムダ項 M に対して β-簡約を複数回 (0 回も可) 行って N が得られるとき，$M \twoheadrightarrow_\beta N$ と表す．$\twoheadrightarrow_\eta$ と $\twoheadrightarrow_{\beta\eta}$ も同様に定義する．

定義 18. $\to_\beta$ をラムダ項の間の二項関係とみなし，$\to_\beta$ が生成する同値関係を $=_\beta$ で表す．$=_\eta$ と $=_{\beta\eta}$ も同様に定義する．

なお，$=_{\beta\eta}$ は簡約の種類を省略して単に $=$ とだけ書くこともある．

$M =_{\beta\eta} N$ とは，$\beta\eta$-簡約の図式

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, two heads, "\beta\eta"'] & & P_2 \arrow[dl, two heads, "\beta\eta"] \arrow[dr, two heads, "\beta\eta"'] & & \cdots & & N \arrow[dl, two heads, "\beta\eta"] \\
& P_1 & & P_3 & & P_n &
\end{tikzcd}$$

が成り立つということである．例えば，

$$\begin{aligned}
(\lambda x^a y^{a\to b\to c}.\, y^{a\to b\to c} x^a) v^a w^{a\to b\to c} &= (\lambda y^{a\to b\to c}.\, y^{a\to b\to c} v^a) w^{a\to b\to c} \\
&= w^{a\to b\to c} v^a \\
&= (\lambda z^{b\to c}.\, z^{b\to c})(w^{a\to b\to c} v^a) \\
&= \lambda x^b.\, (\lambda z^{b\to c}.\, z^{b\to c})(w^{a\to b\to c} v^a) x^b
\end{aligned}$$

である．

β-簡約もしくは η-簡約でラムダ項の型は変化しない．

命題 19. ラムダ項 M, N が $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$ なるとき，M と N の型は等しい．

1 回分の β-簡約もしくは η-簡約で型が変化しないことを示せば十分である．

$M \to_\beta N$ であるとし，$M \in \Lambda_\to(\sigma)$ のラムダ項とする．$M \equiv (\lambda x^\tau.\, P)Q$ とおいて良い．このとき，ラムダ項の定義から，ある型 ρ に対して $\lambda x^\tau.\, P \in \Lambda_\to(\rho \to \sigma)$ かつ $Q \in \Lambda_\to(\rho)$ でなければならない．さらに，$\lambda x^\tau.\, P \in \Lambda_\to(\rho \to \sigma)$ より，$\tau \equiv \rho$ かつ $P \in \Lambda_\to(\sigma)$ である．したがって，命題 13 より，$N \equiv P[x^\tau := Q]$ は定義されてその型は P と同じく σ である．

$M \to_\eta N$ であるとし，$M \in \Lambda_\to(\sigma)$ のラムダ項とする．$M \equiv \lambda x^\tau.\, P x^\tau$ とおいて良い．ラムダ項の定義から，ある型 ρ に対して $\sigma \equiv \tau \to \rho$ かつ $P x^\tau \in \Lambda_\to(\rho)$ でなければならない．これよりさらに $P \in \Lambda_\to(\tau \to \rho)$ が分かる．$N \equiv P$ と $\sigma \equiv \tau \to \rho$ であったから，N は型 σ である．

2.6. 正規形

$f(x) = x + 5$ という関数に対し，$f(3)$ と表現されているものは f の定義に従って計算をすることにより $3 + 5\ (= 8)$ になる．これをラムダ計算の世界で考えれば，$(\lambda x.\, (x + 5))3$ という項を $3 + 5$ に置き換えることになり，β-簡約そのものである．すなわち，β-簡約とは関数を適用して計算することであり，$(\lambda x.\, (x + 5))3$ は計算を行う前のある意味で冗長な形だと考えられる．ここから，冗長ではない簡約し切った形への興味が生まれる．

定義 20. ラムダ項 M に対し，$M \to_\beta N$ を満たすラムダ項 N が存在しないとき，M を β-**正規形** (normal form) という．η-**正規形**や $\beta\eta$-**正規形**も同様に定義する．

定義 21. $(\lambda x. P)Q$ という形のラムダ項を β-**基** (redex) という．また，$x \notin \mathrm{FV}(P)$ なる $\lambda x. Px$ という形のラムダ項を η-**基**という．

定義 22. ラムダ項 M を考える．ラムダ項 N で，$M \twoheadrightarrow_\beta N$ かつ N が β-正規形であるようなものが存在するとき，M は β-**正規形をもつ** (have normal form) という．η-**正規形をもつ**ことや $\beta\eta$-**正規形をもつ**ことも同様に定義する．

例えば，上で例に挙げた $w^{a\to b}((\lambda x^{a\to a}. x^{a\to a}(x^{a\to a}z^a))(\lambda y^a. y^a))$ は β-正規形をもつ．実際，$w^{a\to b}z^a$ がその β-正規形である．

3. トピック

3.1. 弱正規化可能性

任意の型付きラムダ項は $\beta\eta$-正規形をもつことが知られている．これを証明するために，まず β-簡約によって β-基がどのように消えたり生まれたりするかを詳しく調べる必要がある．

以下では，表記の便宜のため，あるラムダ項 C に部分項として P が出現しているとき，その出現 P を明示して $C[P]$ と表すことにする．このとき，出現 P を別のラムダ項 Q に置き換えて得られるラムダ項は $C[Q]$ と表す．この置き換えにより，Q に含まれる自由変項が新たに束縛されることもある．例えば，

$$C[\lambda x. xy] \equiv (\lambda z. (\lambda x. xy))(\lambda w. w)$$

とおくとき，

$$C[z] \equiv (\lambda z. z)(\lambda w. w)$$

であるが，このとき，z が $C[z]$ の束縛変項になっている．

また，この項では単に β-基と言ったらその β-基の出現のことであるとする．したがって，同じ形の β-基でも場所が異なるものは別物だと見なす．

簡約後のラムダ項に含まれる β-基を 2 つに分類する．

定義 23. ラムダ項 M に含まれる β-基 $R \equiv (\lambda x. P)Q$ を $R' \equiv P[x := Q]$ に簡約して得られるラムダ項を N とする．また，M に含まれる β-基 S をとる．このとき，R による S の**残基** (residue) を以下によって定義する．

R と S が同じであるとき．このときは，S の残基は存在しない．

R と S が別の位置にあるとき．このとき，R の簡約により S は変化しないので，S はそのまま N に部分項として含まれる．この N に含まれる出現 S を，S の残基とする．

S が R を含むとき．$M \equiv C[S]$, $S \equiv D[R]$ と書けるから，$N \equiv C[D[R']]$ と書ける．$S' \equiv D[R']$ とおくと $N \equiv C[S']$ となるが，このような出現 S' を S の残基とする．

R が S を含み，特に P が S を含むとき．$M \equiv C[R]$, $P \equiv D[S]$ と書けるから，$R' \equiv D[S][x \coloneqq Q]$ である．したがって，$S' \equiv S[x \coloneqq Q]$ とおくと $N \equiv C[D[S'][x \coloneqq Q]]$ となるが，このような出現 S' を S の残基とする．

R が S を含み，特に Q が S を含むとき．$M \equiv C[R]$, $Q \equiv D[S]$ と書けるから，$N \equiv C[P[x \coloneqq D[S]]]$ と書ける．この $P[x \coloneqq D[S]]$ に含まれる S の形をした出現 (複数個もしくは 0 個になり得る) を，S の残基とする．

残基については一般論を見るよりは具体例を見るのが分かりやすいので，各場合におけるシンプルな例を 1 つずつ挙げておく．R と S が別の位置にあるときというのは，

$$(\underbrace{(\lambda x.\, xy)x}_{R})(\underbrace{(\lambda z.\, xz)z}_{S}\, w) \to_\beta (xy)(\underbrace{(\lambda z.\, xz)z}_{S\text{ の残基}}\, w)$$

などの場合である．S の残基と S は，形は同じである．S が R を含むときというのは，

$$\underbrace{(\lambda y.\, \overbrace{(\lambda x.\, xy)x}^{R})z}_{S}\, w \to_\beta \underbrace{(\lambda y.\, xy)z}_{S\text{ の残基}}\, w$$

などである．$R \equiv (\lambda x.\, P)Q$ の P が S を含むときは，

$$\overbrace{(\lambda x.\, \underbrace{(\lambda y.\, y)x}_{S}\, w)z}^{R} \to_\beta \underbrace{(\lambda y.\, y)z}_{S\text{ の残基}}\, w$$

などの場合である．最後に，$R \equiv (\lambda x.\, P)Q$ の Q が S を含むときは，

$$\overbrace{(\lambda x.\, wxx)(\underbrace{(\lambda y.\, y)z}_{S})}^{R} \to_\beta w(\underbrace{(\lambda y.\, y)z}_{S\text{ の残基}})(\underbrace{(\lambda y.\, y)z}_{S\text{ の残基}})$$

などである．このときは，P に出現する x の個数分だけ残基が生じる．

β-基 R を簡約することで，すでに存在していた別の β-基 S が変形する可能性があるが，その変形した結果というのが S の残基であると解釈できる．一方，β-基の簡約によって，全く新しい β-基が生じることもある．

定義 24. ラムダ項 M に含まれる β-基 R を簡約して得られるラムダ項を N とする．このとき，N に含まれる β-基のうち，M に含まれるどんな β-基の残基でもないようなものを，R によって**生成された基** (created redex) という．

3 つほど例を挙げる．簡約

$$(\lambda x.\, C[xT])(\lambda y.\, U) \to_\beta C[(\lambda y.\, U)T]$$

では，$(\lambda x.\, C[xT])(\lambda y.\, U)$ の簡約により $(\lambda y.\, U)T$ が生成されている．次に，

$$(\lambda x.\, (\lambda y.\, U))QT \to_\beta (\lambda y.\, U[x \coloneqq Q])T$$

では，$(\lambda x.(\lambda y.U))Q$ の簡約により $(\lambda y.U[x := Q])T$ が生成されている．最後に，

$$(\lambda x.x)(\lambda y.U)T \to_\beta (\lambda y.U)T$$

では，$(\lambda x.x)(\lambda y.U)$ の簡約により $(\lambda y.U)T$ が生成されている．

さて，β-簡約により新たに β-基が生成されるパターンを 3 つ挙げたが，実は β-基が生成されるときは必ずこの 3 パターンのどれかになる．このことを以下に 2 つの補題を示しながら証明する．この部分の証明は主に Lévy[3] によった．

補題 25.　ラムダ項 M に含まれる β-基 $R \equiv (\lambda x.P)Q$ を簡約して得られるラムダ項を N とする．M は β-基でなく N は β-基であるとすると，

- $M \equiv RT$ かつ $P \equiv \lambda y.U$ と表せる．
- $M \equiv RT$ かつ $P \equiv x$, $Q \equiv \lambda y.U$ と表せる．

のどちらか一方である．

N は β-基なので，$N \equiv (\lambda y.X)Y$ とおく．また，$R' \equiv P[x := Q]$ とおく．M の最も外側の構造によって場合分けする．

場合 1:　$M \equiv R$ のとき．M が β-基ではないので，これはあり得ない．

場合 2:　$M \equiv \lambda w.C[R]$ と書けるとき．$N \equiv \lambda w.C[R']$ となるが，N は $(\lambda y.X)Y$ の形なので，これはあり得ない．

場合 3:　$M \equiv TC[R]$ と書けるとき．$N \equiv TC[R']$ となり $N \equiv (\lambda y.X)Y$ であったから，$T \equiv \lambda y.X$ である．したがって $M \equiv (\lambda y.X)C[R]$ となるが，M は β-基ではないのでこれは不可能である．

場合 4:　$M \equiv C[R]T$ と書けるとき．$N \equiv C[R']T$ となり $N \equiv (\lambda y.X)Y$ であったから，$C[R'] \equiv \lambda y.X$ である．X に R' が含まれているとすると，$C[R'] \equiv \lambda y.D[R']$ と書けて $M \equiv (\lambda y.D[R])T$ となるが，M は β-基ではないので矛盾である．これより $R' \equiv C[R'] \equiv \lambda y.X$ でなければならず，$M \equiv RT$ となる．ここで $R' \equiv P[x := Q]$ だったから，

- $P \equiv \lambda y.U$ と表され $U[x := P] \equiv X$ が成り立つ．
- $P \equiv x$ であり $Q \equiv \lambda y.X$ である．

のいずれかである．このそれぞれが，補題の主張のそれぞれの場合に対応している．

補題 26.　ラムダ項 M, N を考える．M は β-基でなく $M[x := N]$ は β-基であるとすると，

- $M \equiv xT$ かつ $N \equiv \lambda y.U$ と表せる．
- $M \equiv x$ である．

のどちらか一方である．

M の最も外側の構造によって場合分けする．

場合 1:　M が変項の場合．$M \equiv y$ で $y \not\equiv x$ あれば $M[x := N] \equiv N$ であるから，これが β-基であるとすると M が β-基でないことに矛盾する．したがって，$M \equiv x$ であり，補題の主張の 2 番目の場合に相当する．

場合 2:　$M \equiv \lambda w.\,T$ と書けるとき．$M[x := N] \equiv \lambda w.\,T[x := N]$ であるが，これは β-基になり得ない．したがって，この場合は不可能である．

場合 3:　$M \equiv VT$ と書けるとき．さらに V の構造によって場合分けをする．$V \equiv XY$ と書ける場合は $M \equiv XYT$ となるが，このとき $M[x := N]$ は β-基になり得ず矛盾である．$V \equiv \lambda v.\,X$ と書ける場合は $M \equiv (\lambda v.\,X)T$ となり，M が β-基でないことに矛盾する．以上により，V は変項でなければならない．$V \equiv v$ かつ $v \not\equiv x$ であれば $M[x := N] \equiv vT[x := N]$ となるが，これは β-基にはなり得ないので矛盾である．よって $V \equiv x$ である．このとき $M[x := N] \equiv NT[x := N]$ となるが，これは β-基であるから，$N \equiv \lambda y.\,U$ の形でなければならない．これが補題の主張の 1 番目の場合に相当している．

補題 27.　β-簡約により新たな β-基が生成されるとき，その β-簡約について，

- $(\lambda x.\,C[xT])(\lambda y.\,U) \to_\beta C[(\lambda y.\,U)T]$ の形である．
- $(\lambda x.\,(\lambda y.\,U))QT \to_\beta (\lambda y.\,U[x := Q])T$ の形である．
- $(\lambda x.\,x)(\lambda y.\,U)T \to_\beta (\lambda y.\,U)T$ の形である．

のいずれかである．

　ラムダ項 M に含まれる β-基 $R \equiv (\lambda x.\,P)Q$ を簡約して得られるラムダ項を N とする．また，S を R によって生成される β-基とする．$R' \equiv P[x := Q]$ とおく．また，$M \equiv D[R], N \equiv E[S]$ と表す．R' と S の位置によって場合分けする．

場合 1:　R' と S が別の位置にあるとき．このとき，S は M にもそのまま出現しており，それの残基が S なので，この場合は不可能である．

場合 2:　S が R' を含むとき．$M \equiv E[S']$ となるような S' がある．このとき，S' には R が含まれ，この R を簡約すると S になる．また，S' が β-基だとすると S は S' の残基になってしまい矛盾するので，S' は β-基ではない．したがって補題 25 が適用できる．

　$S' \equiv (\lambda x.\,P)QT$ かつ $P \equiv \lambda y.\,U$ となるときは，

$$
\begin{aligned}
M &\equiv E[(\lambda x.\,(\lambda y.\,U))QT] \\
N &\equiv E[(\lambda y.\,U[x := Q])T]
\end{aligned}
$$

となり，補題の主張の 2 番目のパターンになる．一方，$S' \equiv (\lambda x.\,P)QT$ かつ $P \equiv x, Q \equiv \lambda y.\,U$ となるときは,

$$
\begin{aligned}
M &\equiv E[(\lambda x.\,x)(\lambda y.\,U)T] \\
N &\equiv E[(\lambda y.\,U)T]
\end{aligned}
$$

となり，補題の主張の 3 番目のパターンになる．

場合 3:　R' が S を含むとき．まず，S は Q には含まれない．なぜなら，もしそうだとすると S が残基になって矛盾するからである．したがって，P の部分項 P' であって $P'[x := Q] \equiv S$ なるものが存在する．ここで，まず $P' \not\equiv x$ が分かる．さらに P' は β-基ではない．これは，もしそうだとすると S が残基になって矛盾するからである．以上により，補題 26 が適用でき，$P' \not\equiv x$ であることから，$P' \equiv xT$ かつ $Q \equiv \lambda y. U$ と表せる．$P \equiv C[P']$ と書けば，

$$M \equiv D[(\lambda x. C[xT])(\lambda y. U)]$$
$$N \equiv D[C[(\lambda y. U)T]]$$

となり，補題の主張の 1 番目のパターンになる．

以上によって，β-基の簡約により，それ以外の β-基がどう変化し，またどのような β-基が生成されるかが分かった．

さて，β-正規形の存在を示すには，β-基の深さに注目する．

定義 28.　型 σ に対し，$\mathrm{dpt}(\sigma)$ を以下によって再帰的に定義する．

$$\mathrm{dpt}(a) = 1$$
$$\mathrm{dpt}(\sigma \to \tau) = \max(\mathrm{dpt}(\sigma), \mathrm{dpt}(\tau)) + 1$$

このとき，$\mathrm{dpt}(\sigma)$ を σ の深さ (depth) という．

定義 29.　β-基 $R \equiv (\lambda x^{\sigma}. P^{\tau})Q^{\sigma}$ に対し，

$$\mathrm{dpt}(R) = \mathrm{dpt}(\sigma \to \tau)$$

と定義し，$\mathrm{dpt}(R)$ を R の深さ (depth) という．

補題 30.　ラムダ項 M に含まれる β-基 R を簡約することを考える．M に含まれる β-基 S をとり，R による S の残基の 1 つを S' とする．このとき，S と S' について，その全体の型と束縛変項の型は等しい．特に $\mathrm{dpt}(S) = \mathrm{dpt}(S')$ である．

残基の定義から明らかである．

補題 31.　あるラムダ項に含まれる β-基 R を簡約した結果，β-基 S が生成されたとする．このとき，$\mathrm{dpt}(R) > \mathrm{dpt}(S)$ が成り立つ．

補題 27 の 3 パターンを全て調べれば良い．

1 番目のパターンは，

$$(\lambda x^{\sigma\to\tau}. C[x^{\sigma\to\tau}T^{\sigma}]^{\rho})(\lambda y^{\sigma}. U^{\tau}) \to_{\beta} C[(\lambda y^{\sigma}. U^{\tau})T^{\sigma}]^{\rho}$$

と型付けられているはずである．この場合において，簡約した β-基の深さ R と生成された β-基 S の深さは，

$$\mathrm{dpt}(R) = \mathrm{dpt}((\sigma \to \tau) \to \rho) \qquad \mathrm{dpt}(S) = \mathrm{dpt}(\sigma \to \tau)$$

であり，深さの定義から $\mathrm{dpt}(R) > \mathrm{dpt}(S)$ である．2 番目のパターンは,

$$(\lambda x^{\sigma}.\,(\lambda y^{\tau}.\,U^{\rho}))Q^{\sigma}T^{\tau} \to_{\beta} (\lambda y^{\tau}.\,U[x^{\sigma} := Q^{\sigma}]^{\rho})T^{\tau}$$

となり，このとき,

$$\mathrm{dpt}(R) = \mathrm{dpt}(\sigma \to (\tau \to \rho)) \qquad \mathrm{dpt}(S) = \mathrm{dpt}(\tau \to \rho)$$

である．3 番目のパターンは,

$$(\lambda x^{\sigma\to\tau}.\,x^{\sigma\to\tau})(\lambda y^{\sigma}.\,U^{\tau})T^{\sigma} \to_{\beta} (\lambda y^{\sigma}.\,U^{\tau})T^{\sigma}$$

であり,

$$\mathrm{dpt}(R) = \mathrm{dpt}((\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \tau)) \qquad \mathrm{dpt}(S) = \mathrm{dpt}(\sigma \to \tau)$$

となる．これらの場合も，深さの定義から $\mathrm{dpt}(R) > \mathrm{dpt}(S)$ が成り立つ．

さて，以下では順序数を扱うが，順序数の和については，表記の順番に関わらず ω の指数が大きいものから順に和をとることにする．例えば，$\omega^2 + \omega^3 + \omega^3$ と書かれていても $\omega^3 + \omega^3 + \omega^2 = \omega^3 2 + \omega^2$ のことであると解釈する．

定義 32. ラムダ項 M に対し，順序数 $\mathrm{ord}(M)$ を,

$$\mathrm{ord}(M) = \sum_{R} \omega^{\mathrm{dpt}(R)}$$

と定義する．なお，和は M に部分項として出現する全ての β-基 R を回るものとする．

例えば,

$$M \equiv (\lambda y^{a\to a\to a}.\,y^{a\to a\to a}((\lambda x^{a}.\,x^{a})x^{a})((\lambda x^{a}.\,x^{a})x^{a}))y^{a\to a\to a}$$

に含まれる β-基は,

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv (\lambda y^{a\to a\to a}.\,y^{a\to a\to a}((\lambda x^{a}.\,x^{a})x^{a})((\lambda x^{a}.\,x^{a})x^{a}))y^{a\to a\to a} \\ R_2 &\equiv (\lambda x^{a}.\,x^{a})x^{a} \end{aligned}$$

の 2 つだが，R_2 は 2 回出現しているので,

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(M) &= \omega^{\mathrm{dpt}(R_1)} + \omega^{\mathrm{dpt}(R_2)} + \omega^{\mathrm{dpt}(R_2)} \\ &= \omega^{\mathrm{dpt}((a\to a\to a)\to a)} + \omega^{\mathrm{dpt}(a\to a)} + \omega^{\mathrm{dpt}(a\to a)} \\ &= \omega^4 + \omega^2 2 \end{aligned}$$

となる．

以上の準備により，任意のラムダ項が正規形をもつことが示される．

定理 33.［弱正規化定理 (weak normalisation theorem)］ 任意の型付きラムダ項は β-正規形をもつ．

ラムダ項 M が β-正規形ではないとする．M に部分項として含まれる β-基のうち，その深さが最大のものの中で最も右にあるものを R とする．ここで，β-基 $(\lambda x.P)Q$ の位置は λ の位置で判断するものとする．このとき，M に含まれる R を簡約したものを $F(M)$ と書くことにする．

M に含まれる R 以外の β-基のうち，Q に含まれないものを $S_1, \cdots, S_l$ とし，Q に含まれるもの $T_1, \cdots, T_m$ とする．R による $S_1, \cdots, S_l$ の残基はそれぞれ 1 つなので，各 S_i の残基を S'_i とおく．一方，R による $T_1, \cdots, T_m$ の残基は複数になり得る．そこで，各 T_i の残基を $T'_{i1}, \cdots, T'_{ik_i}$ とおくことにする．また，R によって生成される $F(M)$ 内の β-基を $U'_1, \cdots, U'_n$ とする．このとき，$F(M)$ に含まれる β-基は，$S'_1, \cdots, S'_l, T'_1, \cdots, T'_m, U'_1, \cdots, U'_n$ で全てである．

補題 30 より，$\mathrm{dpt}(S'_i) = \mathrm{dpt}(S_i)$ また $\mathrm{dpt}(T'_{ij}) = \mathrm{dpt}(T_i)$ である．さらに，各 T_i は Q に含まれているので，R より右側にある．R は最も右側にとっていたので，$\mathrm{dpt}(T'_{ij}) = \mathrm{dpt}(T_i) < \mathrm{dpt}(R)$ が成り立つ．また，補題 31 より，$\mathrm{dpt}(U'_i) < \mathrm{dpt}(R)$ も成り立つ．したがって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ord}(F(M)) &= \sum_{i=1}^{l} \omega^{\mathrm{dpt}(S'_i)} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \omega^{\mathrm{dpt}(T'_{ij})} + \sum_{i=1}^{n} \omega^{\mathrm{dpt}(U'_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{l} \omega^{\mathrm{dpt}(S_i)} + \sum_{i=1}^{m} \omega^{\mathrm{dpt}(T_i)} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \omega^{\mathrm{dpt}(T'_{ij})} + \sum_{i=1}^{n} \omega^{\mathrm{dpt}(U'_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{l} \omega^{\mathrm{dpt}(S_i)} + \sum_{i=1}^{m} \omega^{\mathrm{dpt}(T_i)} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \omega^{\mathrm{dpt}(R)-1} + \sum_{i=1}^{n} \omega^{\mathrm{dpt}(R)-1} \\
&= \sum_{i=1}^{l} \omega^{\mathrm{dpt}(S_i)} + \sum_{i=1}^{m} \omega^{\mathrm{dpt}(T_i)} + \omega^{\mathrm{dpt}(R)-1}(k_1 + \cdots + k_m + n) \\
&< \sum_{i=1}^{l} \omega^{\mathrm{dpt}(S_i)} + \sum_{i=1}^{m} \omega^{\mathrm{dpt}(T_i)} + \omega^{\mathrm{dpt}(R)} \\
&= \mathrm{ord}(M)
\end{aligned}
$$

が分かる．

以上により，β-簡約の列

$$M \to_\beta F(M) \to_\beta F^2(M) \to_\beta \cdots$$

が無限に続くと仮定すると，順序数の無限減少列

$$\mathrm{ord}(M) > \mathrm{ord}(F(M)) > \mathrm{ord}(F^2(M)) > \cdots$$

を得るが，これは不可能である．これにより，上記の β-簡約の列は有限回のうちに β-正規形で止まる．

系 34. 任意の型付きラムダ項は $\beta\eta$-正規形をもつ．

任意にラムダ項 M をとる．定理 33 により，M は β-正規形 N をもつ．η-簡約により β-基が新たに生じることはなく，さらにラムダ項の長さは減少するので，N から始まる η-簡約列は有限回のうちに $\beta\eta$-正規形 L で止まる．$M \twoheadrightarrow_\beta N \twoheadrightarrow_\eta L$ であるから，L は M の $\beta\eta$-正規形である．

なお，型なしラムダ計算では弱正規化定理は成り立たない．例えば，$(\lambda x.\, xx)(\lambda x.\, xx)$ は型なしラムダ計算では正当なラムダ項であるが，β-簡約により自分自身になるため，β-正規形をもたない．

型付きラムダ計算については，弱正規化定理より強く以下の定理が成り立つことが知られている．

定理 35.［**強正規化定理** (strong normalisation theorem)］ 任意の型付きラムダ項 M を考える．M から始まる任意の β-簡約の列

$$M \to_\beta N_1 \to_\beta N_2 \to_\beta \cdots$$

は必ず有限回で止まる．

強正規化定理の証明には型なしラムダ計算の結果が必要なため，ここでは省略する．

ところで，弱正規化定理の証明には，各ラムダ項に順序数を割り当てて，特定の簡約を行うとその順序数が必ず減少することを利用した．これを拡張して，どんな簡約をしても必ず減少するような順序数を各ラムダ項に割り当てられれば，同じ方法で強正規化定理が証明できるが，これは未だ成功していない．

3.2. 真偽値と自然数

この項では，型 σ を 1 つとって固定する．

ラムダ計算は，一種の型があるプログラミング言語として解釈することもできる．一般的なプログラミング言語で用いる型といえば，例えば真偽値型や整数型などがあるが，これらをラムダ計算上に構成することができる．

定義 36. 型 $\mathbf{Bool}_\sigma$ を，

$$\mathbf{Bool}_\sigma \equiv \sigma \to \sigma \to \sigma$$

によって定義する．これを**真偽値型** (boolean type) という．

定義 37. 型 $\mathbf{Bool}_\sigma$ のラムダ項 **true**, **false** を

$$\mathbf{true} \equiv \lambda x^\sigma y^\sigma.\, x^\sigma$$
$$\mathbf{false} \equiv \lambda x^\sigma y^\sigma.\, y^\sigma$$

によって定義する．

任意の真偽値関数はラムダ項で表現できる．以下はその例である．

定義 38. 型 $\mathbf{Bool}_\sigma \to \mathbf{Bool}_\sigma$ のラムダ項 **not** を

$$\mathbf{not} \equiv \lambda s^{\mathbf{Bool}_\sigma} x^\sigma y^\sigma.\, s^{\mathbf{Bool}_\sigma} y^\sigma x^\sigma$$

で定義する．また，型 $\mathbf{Bool}_\sigma \to \mathbf{Bool}_\sigma \to \mathbf{Bool}_\sigma$ のラムダ項 **and**, **or**, **imp** を

$$\mathbf{and} \equiv \lambda s^{\mathbf{Bool}_\sigma} t^{\mathbf{Bool}_\sigma} x^\sigma y^\sigma.\, s^{\mathbf{Bool}_\sigma}(t^{\mathbf{Bool}_\sigma} x^\sigma y^\sigma) y^\sigma$$

$$\mathbf{or} \equiv \lambda s^{\mathbf{Bool}_\sigma} t^{\mathbf{Bool}_\sigma} x^\sigma y^\sigma.\, s^{\mathbf{Bool}_\sigma} x^\sigma (t^{\mathbf{Bool}_\sigma} x^\sigma y^\sigma)$$
$$\mathbf{imp} \equiv \lambda s^{\mathbf{Bool}_\sigma} t^{\mathbf{Bool}_\sigma} x^\sigma y^\sigma.\, s^{\mathbf{Bool}_\sigma} (t^{\mathbf{Bool}_\sigma} x^\sigma y^\sigma) x^\sigma$$

で定義する．

これらのラムダ項は，名前から予想される性質を実際に満たしている．例えば，

$$\begin{aligned}
\mathbf{and}\,\mathbf{true}\,\mathbf{false} &\equiv (\lambda stxy.\, s(txy)y)(\lambda xy.\, x)(\lambda xy.\, y) \\
&= \lambda xy.\, (\lambda xy.\, x)((\lambda xy.\, y)xy)y \\
&= \lambda xy.\, (\lambda xy.\, x)yy \\
&= \lambda xy.\, y \\
&\equiv \mathbf{false}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

定義 39. 型 $\mathbf{Nat}_\sigma$ を，

$$\mathbf{Nat}_\sigma \equiv (\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma$$

で定義する．これを**自然数型** (natural number type) という．

定義 40. 自然数 n に対し，型 $\mathbf{Nat}_\sigma$ のラムダ項 $\underline{n}$ を，

$$\underline{n} \equiv \lambda f^{\sigma\to\sigma} x^\sigma.\, \underbrace{f^{\sigma\to\sigma}(f^{\sigma\to\sigma}(\cdots(f^{\sigma\to\sigma}}_{n\text{ 個}} x^\sigma)))$$

で定義する．これを **Church 数** (— numeral) という．

Church 数上の加算と乗算は定義できる．

定義 41. 型 $\mathbf{Nat}_\sigma \to \mathbf{Nat}_\sigma \to \mathbf{Nat}_\sigma$ のラムダ項 $\mathbf{plus}$, $\mathbf{times}$ を，

$$\mathbf{plus} \equiv \lambda n^{\mathbf{Nat}_\sigma} m^{\mathbf{Nat}_\sigma} f^{\sigma\to\sigma} x^\sigma.\, n^{\mathbf{Nat}_\sigma} f^{\sigma\to\sigma} (m^{\mathbf{Nat}_\sigma} f^{\sigma\to\sigma} x^\sigma)$$
$$\mathbf{times} \equiv \lambda n^{\mathbf{Nat}_\sigma} m^{\mathbf{Nat}_\sigma} f^{\sigma\to\sigma} x^\sigma.\, m(\lambda y^\sigma.\, n^{\mathbf{Nat}_\sigma} f^{\sigma\to\sigma} y^\sigma) x^\sigma$$

で定義する．

実際，

$$\begin{aligned}
\mathbf{plus}\,\underline{1}\,\underline{2} &\equiv (\lambda nmfx.\, nf(mfx))(\lambda fx.\, fx)(\lambda fx.\, f(fx)) \\
&= \lambda fx.\, (\lambda fx.\, fx)f((\lambda fx.\, f(fx))fx) \\
&= \lambda fx.\, (\lambda fx.\, fx)f(f(fx)) \\
&= \lambda fx.\, f(f(fx)) \\
&\equiv \underline{3}
\end{aligned}$$

であり，また，

$$\mathbf{times}\,\underline{2}\,\underline{2} \equiv (\lambda nmfx.\, m(\lambda y.\, nfy)x)(\lambda fx.\, f(fx))(\lambda fx.\, f(fx))$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda f x.\,(\lambda f x.\,f(fx))(\lambda y.\,(\lambda f x.\,f(fx)) f y) x \\
&= \lambda f x.\,(\lambda f x.\,f(fx))(\lambda y.\,f(fy)) x \\
&= \lambda f x.\,(\lambda y.\,f(fy))((\lambda y.\,f(fy)) x) \\
&= \lambda f x.\,(\lambda y.\,f(fy))(f(fx)) \\
&= \lambda f x.\,f(f(f(fx))) \\
&\equiv \underline{4}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

自然数に関しては，全ての関数がラムダ項で表現できるわけではない．例えば，第 3.5 項の命題 60 が示すように，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{pred}\,\underline{0} &= \underline{0} \\
\mathbf{pred}\,\underline{n+1} &= \underline{n}
\end{aligned}
$$

を満たすような型 $\mathbf{Nat}_\sigma \to \mathbf{Nat}_\sigma$ の閉じたラムダ項 **pred** は存在しない．ただし，型なしラムダ計算では，上記命題の性質を満たす **pred** は存在する．実際，

$$
\mathbf{pred} \equiv \lambda n f x.\,n(\lambda g h.\,h(g f))(\lambda y.\,x)(\lambda y.\,y)
$$

とすれば良い．

3.3. 具体項生成アルゴリズム

与えられた型 σ に対し，型 σ のラムダ項の具体例を知りたいというのはよくある欲求であろう．その具体例の中でも，特に簡約し切った形である正規形であるものが分かれば便利である．実際，そのような例を生成するアルゴリズムが知られている．

まず，正規形の形についてより詳しく調べる．

補題 42. ラムダ項 M を考える．M が β-正規形であれば，M は，

$$
M \equiv \lambda x_1 \cdots x_m.\,y N_1 \cdots N_n
$$

の形である．ただし，$N_1, \cdots, N_n$ は β-正規形のラムダ項であり，$m, n \geq 0$ である．

M の構造に関する帰納法による．

場合 1: M が変項の場合．明らかに補題の主張の形になっている．

場合 2: $M \equiv PQ$ のとき．M は β-正規形なので，P, Q も β-正規形でなければならない．したがって帰納法の仮定より，

$$
P \equiv \lambda x_1 \cdots x_m.\,y N_1 \cdots N_n
$$

と書け，$N_1, \cdots, N_n$ は β-正規形である．したがって，

$$
M \equiv (\lambda x_1 \cdots x_m.\,y N_1 \cdots N_n) Q
$$

となるが，M は β-正規形なので $m = 0$ でなければならない．これより，

$$M \equiv yN_1 \cdots N_n Q$$

となり，補題の主張の形になっている．

場合 3: $M \equiv \lambda x.\, P$ のとき．M は β-正規形なので，P も β-正規形である．帰納法の仮定より，

$$P \equiv \lambda x_1 \cdots x_m.\, yN_1 \cdots N_n$$

と書けるので，

$$M \equiv \lambda x x_1 \cdots x_m.\, yN_1 \cdots N_n$$

となる．$N_1, \cdots, N_n$ は β-正規形であるから，これは補題の主張の形である．

この補題により，具体項を生成する以下のようなアルゴリズムが考えられる．

定義 43. 型 σ と変項の集合 Γ に対して記号 $N(\sigma, \Gamma)$ を考える．ラムダ項に用いる記号と $N(\sigma, \Gamma)$ 全体の上に以下の簡約規則を与えたものを $\mathcal{N}$ とする．

$$\begin{aligned} N(\sigma, \Gamma) &\to_{\mathcal{N}} x^{\tau_1 \to \cdots \to \tau_n \to \sigma} N(\tau_1, \Gamma) \cdots N(\tau_n, \Gamma) \quad (x^{\tau_1 \to \cdots \to \tau_n \to \sigma} \in \Gamma,\ n \geq 0) \\ N(\sigma \to \tau, \Gamma) &\to_{\mathcal{N}} \lambda x^{\sigma}.\, N(\tau, \Gamma \cup \{x^{\sigma}\}) \end{aligned}$$

定義 44. $\mathcal{N}$ の項 M に対して $\mathcal{N}$ の簡約を複数回 (0 回も可) 行って N が得られるとき，$M \twoheadrightarrow_{\mathcal{N}} N$ と表す．

例えば，

$$\begin{aligned} N((a \to a) \to a, \{x^a\}) &\to_{\mathcal{N}} \lambda y^{a \to a}.\, N(a, \{x^a,\ y^{a \to a}\}) \\ &\to_{\mathcal{N}} \lambda y^{a \to a}.\, y^{a \to a} N(a, \{x^a,\ y^{a \to a}\}) \\ &\to_{\mathcal{N}} \lambda y^{a \to a}.\, y^{a \to a}(y^{a \to a} N(a, \{x^a,\ y^{a \to a}\})) \\ &\to_{\mathcal{N}} \lambda y^{a \to a}.\, y^{a \to a}(y^{a \to a} x^a) \end{aligned}$$

となる．最終的に得られたラムダ項 $\lambda y^{a \to a}.\, y^{a \to a}(y^{a \to a} x^a)$ は型 $(a \to a) \to a$ であり，自由変項として x^a を含んでいる．実は一般に，以下の定理が成り立つ．

定理 45. 型 σ，変項の集合 Γ，ラムダ項 M を考える．2 命題

- $N(\sigma, \Gamma) \twoheadrightarrow_{\mathcal{N}} M$ が成り立つ．
- M は型 σ の β-正規形で $\mathrm{FV}(M) \subseteq \Gamma$ が成り立つ．

は同値である．

補題 42 よりほぼ明らかである．

3.4. 直観主義論理と具体型

型 σ が与えられたとき，その型をもつラムダ項が存在するかどうかを調べたい．条件がなければこれは簡単で，型 σ をもつ変項 x^σ を考えれば良いだけである．そこで，例えば自由変項として x^τ のみをもつ場合といったように，自由変項に制限を加えた場合に特定の型 σ の具体項があるかどうかに興味が湧いてくる．実は，これが直観主義命題論理と対応している．

定義 46. 加算無限集合 $\mathrm{Var}_{\mathrm{prop}}$ を用意し，この元を**原始式** (atomic formula) という．

定義 47. 集合 Form を以下によって再帰的に定義する．

$$p \in \mathrm{Var}_{\mathrm{prop}} \implies p \in \mathrm{Form}$$
$$\phi, \chi \in \mathrm{Form} \implies (\phi \rightsquigarrow \chi) \in \mathrm{Form}$$

このとき，Form の元を**整式** (formula) という[*5]．

以下では，$p, q, r \cdots$ で任意の原始式を表し，$\phi, \chi, \psi, \cdots$ で任意の整式を表すものとする．また，便宜上 $\mathrm{Var}_{\mathrm{prop}} = \mathbb{A}$ としておく．

定義 48. 整式から成る集合 Γ と整式 ϕ に対し，$\Gamma \vdash \phi$ を以下によって再帰的に定義する．

$$\phi \in \Gamma \implies \Gamma \vdash \phi$$
$$\Gamma \vdash \phi \rightsquigarrow \chi \text{ AND } \Gamma \vdash \phi \implies \Gamma \vdash \chi$$
$$\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \chi \implies \Gamma \vdash \phi \rightsquigarrow \chi$$

このとき，$\Gamma \vdash \phi$ が成り立つことを Γ から ϕ は**導出可能** (derivable) であるという．なお，$\emptyset \vdash \phi$ であるときは単に $\vdash \phi$ と書く．

これは一般的な述語論理の体系から，論理演算子として含意のみを取り出したものである．

定義 49. 整式 ϕ に対し，型 $[\phi]$ を以下によって再帰的に定義する．

$$[p] = p$$
$$[\phi \rightsquigarrow \chi] = [\phi] \to [\chi]$$

また，整式の集合 $\Gamma = \{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ に対し，変項の集合 $[\Gamma]$ を，

$$[\Gamma] = \{x_1{}^{[\phi_1]}, \cdots, x_n{}^{[\phi_n]}\}$$

と定義する．

定義からすぐに分かるように，$[\phi]$ とは ϕ に含まれる $\rightsquigarrow$ を $\to$ に置き換えたものである．

*5 ここでは，型に用いている $\to$ と区別するために特殊な記号 $\rightsquigarrow$ を用いたが，普通は単に $\to$ を用いる．

定理 50. 整式 ϕ と整式の集合 Γ に対し，2 命題

- $\Gamma \vdash \phi$ が成り立つ．
- $\mathrm{FV}(M) \subseteq [\Gamma]$ を満たす型 $[\phi]$ のラムダ項 M が存在する．

は同値である．

まず，$\Gamma \vdash \phi$ を仮定して，$\mathrm{FV}(M) \subseteq [\Gamma]$ を満たす型 $[\phi]$ のラムダ項 M の存在を示す．証明は $\Gamma \vdash \phi$ の導出手順に関する帰納法による．

場合 1: $\Gamma \vdash \phi$ が $\phi \in \Gamma$ の帰結である場合．このとき，$x^{[\phi]} \in [\Gamma]$ だから，$M \equiv x^{[\phi]}$ とおけば良い．

場合 2: $\Gamma \vdash \phi$ が $\Gamma \vdash \phi \rightsquigarrow \chi$ かつ $\Gamma \vdash \phi$ の帰結である場合．帰納法の仮定から，型 $[\phi] \to [\chi]$ のラムダ項 T と型 $[\phi]$ のラムダ項 U が存在する．したがって，$M \equiv TU$ とおけば良い．$\mathrm{FV}(T) \subseteq [\Gamma]$ かつ $\mathrm{FV}(U) \subseteq [\Gamma]$ であるから，$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(T) \cup \mathrm{FV}(U) \subseteq [\Gamma]$ が成り立つ．

場合 3: $\Gamma \vdash \phi$ が $\phi \equiv \chi \rightsquigarrow \psi$ であって $\Gamma \cup \{\chi\} \vdash \psi$ の帰結である場合．帰納法の仮定から，型 $[\psi]$ のラムダ項 T が存在する．したがって，$M \equiv \lambda x^{[\chi]}.T$ とおけば良い．$\mathrm{FV}(T) \subseteq [\Gamma \cup \{\chi\}] = [\Gamma] \cup \{x^{[\chi]}\}$ なので，$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(\chi) \setminus \{x^{[\chi]}\} \subseteq [\Gamma]$ である．

逆に，$\mathrm{FV}(M) \subseteq [\Gamma]$ を満たす型 $[\phi]$ のラムダ項 M の存在を仮定して，$\Gamma \vdash \phi$ を示す．証明は M の構造に関する帰納法による．

場合 1: $M \equiv x^{\sigma}$ である場合．$x^{\sigma} \in [\Gamma]$ となるので，$[\phi] \equiv \sigma$ なる整式 ϕ があって $\phi \in \Gamma$ でなければならない．したがって，$\Gamma \vdash \phi$ である．

場合 2: $M \equiv TU$ である場合．このとき，ある型 σ が存在して，$T \in \Lambda_{\to}(\sigma \to [\phi])$ かつ $U \in \Lambda_{\to}(\sigma)$ でなければならない．$[\chi] \equiv \sigma$ なる整式 χ をとれば，$T \in \Lambda_{\to}([\chi \rightsquigarrow \phi])$ で $U \in \Lambda_{\to}([\chi])$ となる．さらに，$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(T) \cup \mathrm{FV}(U) \subseteq [\Gamma]$ であるから，$\mathrm{FV}(T) \subseteq [\Gamma]$ かつ $\mathrm{FV}(U) \subseteq [\Gamma]$ である．したがって，帰納法の仮定より $\Gamma \vdash \chi \rightsquigarrow \phi$ かつ $\Gamma \vdash \chi$ が成り立つ．これより，$\Gamma \vdash \phi$ である．

場合 3: $M \equiv \lambda x^{\sigma}.T$ である場合．このとき，ある型 τ が存在して，$[\phi] \equiv \sigma \to \tau$ であって $T \in \Lambda_{\to}(\tau)$ でなければならない．ここで，$[\chi] \equiv \sigma, [\psi] \equiv \tau$ なる整式 χ, ψ をとる．すると，$\phi \equiv \chi \rightsquigarrow \psi$ であり $T \in \Lambda_{\to}([\chi])$ である．さらに，$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(T) \setminus \{x^{\sigma}\} \subseteq [\Gamma]$ より $\mathrm{FV}(T) \subseteq [\Gamma] \cup \{x^{\sigma}\} = [\Gamma \cup \{\chi\}]$ が分かる．したがって，帰納法の仮定より $\Gamma \cup \{\chi\} \vdash \psi$ が成り立つ．これより，$\Gamma \vdash \chi \rightsquigarrow \psi$ を得る．

系 51. 整式 ϕ に対し，2 命題

- $\vdash \phi$ が成り立つ．
- 型 $[\phi]$ は具体である．

は同値である．

定理 50 において $\Gamma = \emptyset$ とおけば良い．

これにより，直観主義論理と具体型には密接な関係があることが分かる．このような関係は Curry–Howard 同型対応 (— correspondence) といわれる[*6]．なお，古典論理とは対応していない．例え

[*6] ここでは，型の結合子として $\to$ のみを考える単純型理論について述べているので，命題論理の含意とのみの対応までし

ば，整式 $((p \rightsquigarrow q) \rightsquigarrow p) \rightsquigarrow p$ は古典論理の恒真式だが直観主義論理では示されない代表的な命題であるが，これに対応する型には具体項が存在しない．

3.5. 集合論的モデル

$\lambda x. M$ は x を引数にとって M を返すような関数であるなど，ラムダ式の裏にあるイメージについてはすでに述べたが，これを数学的に厳密に定義する．この項では，簡単のため $\mathbb{T}^0$ 上で考え，唯一の原始型は 0 で表す．また，写像 f の像 $f(x)$ は，ラムダ項の表記に合わせて単に fx と書くことにする．

定義 52. 型 σ で添字付けられた非空集合 $\mathcal{M}(\sigma)$ の族 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}(\sigma))_{\sigma \in \mathbb{T}^0}$ を考える．

$$\mathcal{M}(\sigma \to \tau) \subseteq \mathcal{M}(\tau)^{\mathcal{M}(\sigma)}$$

が成り立つとき，$\mathcal{M}$ を**型付き適用構造** (typed applicative structure) という[*7]．

定義 53. 型付き適用構造 $\mathcal{M}$ が，

$$\mathcal{M}(\sigma \to \tau) = \mathcal{M}(\tau)^{\mathcal{M}(\sigma)}$$

を満たすとき，$\mathcal{M}$ は**充満** (full) であるという．

型 σ のラムダ項を $\mathcal{M}(\sigma)$ の元に対応させるのである．$\mathcal{M}(\sigma \to \tau) \subseteq \mathcal{M}(\tau)^{\mathcal{M}(\sigma)}$ という条件は，型 $\sigma \to \tau$ のラムダ項は型 σ の引数をとり型 τ の値を返す関数であるというイメージに対応している．

ラムダ項と型付き適用構造を対応させる写像を定義する．

定義 54. 型付き適用構造 $\mathcal{M}$ を考える．型 σ で添字付けられた写像 $\rho_\sigma \colon \mathrm{Var}(\sigma) \to \mathcal{M}(\sigma)$ の族 $\rho = (\rho_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{T}^0}$ を，$\mathcal{M}$ 上の**評価写像** (valuation) という．

評価写像 ρ は定義では写像の族であるが，1 つの写像 $\rho \colon \mathrm{Var} \to \bigcup_{\sigma \in \mathbb{T}^0} \mathcal{M}(\sigma)$ で $\rho(\mathrm{Var}(\sigma)) \subseteq \mathcal{M}(\sigma)$ を満たすものだと見なすこともできる．以下では，この 2 つの見方を区別せずに議論する．

定義 55. 型付き適用構造 $\mathcal{M}$ 上の評価写像 ρ と元 $d \in \mathcal{M}(\sigma)$ に対し，評価写像 $\rho[x^\sigma := d]$ を，

$$\rho[x^\sigma := d](y^\tau) = \begin{cases} \rho(y^\tau) & (y^\tau \not\equiv x^\sigma) \\ d & (y^\tau \equiv x^\sigma) \end{cases}$$

で定義する．

定義 56. 型付き適用構造 $\mathcal{M}$ を考える．$\mathcal{M}$ 上の評価写像 ρ と型 σ のラムダ項 M に対し，$\mathcal{M}(\sigma)$ の元 $[\![M]\!]_\rho$ を以下によって再帰的に定義する．

$$[\![x^\sigma]\!]_\rho = \rho_\sigma(x^\sigma)$$

か述べることができない．しかし，古典論理の論理積や論理和，さらに命題論理の全称量化や存在量化に対応する型を考える理論もあり，そのような型理論においてもここで述べた対応は成立している．

*7 $\mathcal{M}(\tau)^{\mathcal{M}(\sigma)}$ は $\mathcal{M}(\sigma)$ から $\mathcal{M}(\tau)$ への写像全体の集合である．

$$
\begin{aligned}
[\![M^{\sigma\to\tau}N^{\sigma}]\!]_\rho &= [\![M^{\sigma\to\tau}]\!]_\rho[\![N^{\sigma}]\!]_\rho \\
[\![\lambda x^{\sigma}.\,M^{\tau}]\!]_\rho &= (d \mapsto [\![M^{\tau}]\!]_{\rho[x:=d]}) \quad (\text{右辺} \in \mathscr{M}(\sigma\to\tau))
\end{aligned}
$$

このとき，$[\![M]\!]_\rho$ を M の ρ による**解釈** (interpretation) という．

上記定義の 3 番目の式において，$(d \mapsto [\![M]\!]_{\rho[x:=d]})$ は $\mathscr{M}(\sigma\to\tau)$ の元にならない場合があるので，$[\![M]\!]_\rho$ は必ずしも定義されるわけではない．$\mathscr{M}$ が充満であれば必ず定義される．

命題 57. 型付き適用構造 $\mathscr{M}$ 上の 2 つの評価写像 ρ, ρ' とラムダ項 M を考える．$\rho{\restriction}\mathrm{FV}(M) = \rho'{\restriction}\mathrm{FV}(M)$ が成り立つならば，$[\![M]\!]_\rho$ と $[\![M]\!]_{\rho'}$ のどちらか一方が定義されればもう一方も定義され，その値は等しい[*8]．

$[\![M]\!]_\rho$ が定義されているとする．証明は M の構造に関する帰納法による．
場合 1: $M \equiv x$ のとき．$x \in \mathrm{FV}(M)$ だから，$\rho(x) = \rho'(x)$ である．したがって，$[\![x]\!]_\rho = [\![x]\!]_{\rho'}$ が成り立つ．
場合 2: $M \equiv PQ$ のとき．$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q)$ より $\mathrm{FV}(P) \subseteq \mathrm{FV}(M)$ であるから，$\rho \restriction \mathrm{FV}(P) = \rho' \restriction \mathrm{FV}(P)$ が成り立つ．したがって，帰納法の仮定より，$[\![P]\!]_{\rho'}$ は定義されて $[\![P]\!]_\rho = [\![P]\!]_{\rho'}$ である．同様にして，$[\![Q]\!]_{\rho'}$ は定義されて $[\![Q]\!]_\rho = [\![Q]\!]_{\rho'}$ であることが分かる．これより，$[\![M]\!]_\rho = [\![M]\!]_{\rho'}$ である．
場合 3: $M \equiv \lambda x.\,P$ のとき．$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\}$ であるから $\mathrm{FV}(P) \subseteq \mathrm{FV}(M) \cup \{x\}$ が成り立つ．さて，$\rho \restriction \mathrm{FV}(M) = \rho' \restriction \mathrm{FV}(M)$ より $\rho[x := d] \restriction \mathrm{FV}(M) = \rho'[x := d] \restriction \mathrm{FV}(M)$ も成り立つ．$\rho[x := d]$, $\rho'[x := d]$ の x の像はどちらも d なので，結果 $\rho[x := d] \restriction \mathrm{FV}(P) = \rho'[x := d] \restriction \mathrm{FV}(P)$ を得る．したがって，帰納法の仮定より，$[\![P]\!]_{\rho'[x:=d]}$ は定義されて $[\![P]\!]_{\rho[x:=d]} = [\![P]\!]_{\rho'[x:=d]}$ が成り立つ．これより，$[\![M]\!]_\rho = [\![M]\!]_{\rho'}$ である．

系 58. 型付き適用構造 $\mathscr{M}$ とラムダ項 M を考える．M が閉じているならば，$[\![M]\!]_\rho$ は評価写像 ρ によらず一定である．

$\mathrm{FV}(M) = \emptyset$ なので，命題 57 より従う．
この補題から，閉じたラムダ項 M に対しては ρ は重要ではないので，ρ を省略して単に $[\![M]\!]$ と書くこともある．

定義 59. 型付き適用構造 $\mathscr{M}$ を考える．任意の評価写像 ρ と任意のラムダ項 M に対して $[\![M]\!]_\rho$ が定義されるとき，$\mathscr{M}$ を**型付きラムダモデル** (typed lambda model) という．

型付きラムダモデルを用いたラムダ計算の結果は様々あるが，ここでは 1 つだけ紹介する．

命題 60. 型 $\mathbf{Nat}_0 \to \mathbf{Nat}_0$ の閉じたラムダ項 $\mathbf{pred}$ で，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{pred}\,\underline{0} &= \underline{0} \\
\mathbf{pred}\,\underline{n+1} &= \underline{n}
\end{aligned}
$$

[*8] $\rho \restriction \mathrm{FV}(M)$ は，写像 ρ の $\mathrm{FV}(M)$ への制限を表す．

を満たすものは存在しない.

$\mathbf{Nat}_0$ と $\underline{n}$ の定義については第 3.2 項を参照すること.

$\mathscr{M}(0)$ が 2 元から成る集合であるような充満型付き適用構造 $\mathscr{M}$ を考える．このような $\mathscr{M}$ は $\mathscr{M}(0)$ から再帰的に定義できる．有限集合上の関数は有限個しかないので，$\mathscr{M}(\mathbf{Nat}_0)$ は有限集合である．ここで，任意の自然数 n に対し $[\![\underline{n}]\!] \in \mathscr{M}(\mathbf{Nat}_0)$ である．自然数は無限個あるので，ある相異なる自然数 m, n が存在して $[\![\underline{m}]\!] = [\![\underline{n}]\!]$ でなければならない．$m < n$ としておく.

さて，命題の主張のようなラムダ項 $\mathbf{pred}$ が存在したとする．このとき,

$$\underbrace{[\![\mathbf{pred}]\!]([\![\mathbf{pred}]\!](\cdots([\![\mathbf{pred}]\!]}_{n-1\text{ 個}}[\![\underline{m}]\!]))) = [\![\mathbf{pred}(\mathbf{pred}(\cdots(\mathbf{pred}\,\underline{m})))]\!] = [\![\underline{0}]\!]$$

が成り立ち，また,

$$\underbrace{[\![\mathbf{pred}]\!]([\![\mathbf{pred}]\!](\cdots([\![\mathbf{pred}]\!]}_{n-1\text{ 個}}[\![\underline{n}]\!]))) = [\![\mathbf{pred}(\mathbf{pred}(\cdots(\mathbf{pred}\,\underline{n})))]\!] = [\![\underline{1}]\!]$$

が成り立つ．ここで $[\![\underline{m}]\!] = [\![\underline{n}]\!]$ であったから，$[\![\underline{0}]\!] = [\![\underline{1}]\!]$ が成り立つ.

任意の評価写像 ρ をとる．このとき,

$$[\![\underline{0}]\!]_\rho [\![\lambda z^0.\, x^0]\!]_\rho [\![y^0]\!]_\rho = [\![(\lambda f^{0\to 0} x^0.\, x^0)(\lambda z^0.\, x^0) y^0]\!]_\rho = [\![y^0]\!]_\rho$$

であり，同様の計算により,

$$[\![\underline{1}]\!]_\rho [\![\lambda z^0.\, x^0]\!]_\rho [\![y^0]\!]_\rho = [\![x^0]\!]_\rho$$

である．$[\![\underline{0}]\!] = [\![\underline{1}]\!]$ であることから，$[\![x^0]\!]_\rho = [\![y^0]\!]_\rho$ すなわち $\rho_0(x^0) = \rho_0(y^0)$ が成り立つ．ここで，ρ_0 は任意にとれるから，$\rho_0(x^0)$ や $\rho_0(y^0)$ は $\mathscr{M}(0)$ の任意の元を動く．したがって，$\mathscr{M}(0)$ は 1 元集合であるが，これは矛盾である．以上により，命題の主張のようなラムダ項 $\mathbf{pred}$ は存在しない.

4.　終わりに

この文書で扱ったラムダ計算の結果は，初歩の中の初歩に過ぎません．より深く学びたい場合には，型なしラムダ計算については Barendregt[1] をお勧めします．これは世界的にもわりと名著とされている本で，これを読んでおけば型なしラムダ計算については間違いないらしいです．型なしラムダ計算と型付きラムダ計算の両方を学びたい場合は，Hindley[4] をお勧めします．なお，この文書を書くときに参考にした Barendregt[2] は分量が多すぎるので，初めから勉強するにはあまり適切ではありませんが，別の本で勉強した後に眺めるには良い本だと思います．型理論を扱った別の本として Pierce[5] (和訳も出版されている) は有名ですが，数学的な立場というより情報学的な立場からの本という印象があるので，注意が必要です.

参考文献

[1] H. P. Barendregt (1984)『The Lambda Calculus』North Holland

[2] H. P. Barendregt, W. Dekkers, R. Statman (2013)『Lambda Calculus with Types』Cambridge University Press

[3] J. J. Lévy (1978)『Réductions Correctes et Optimales dans le Lambda-Calcul』Ph. D. thesis of l'Université Paris VII

[4] J. R. Hindley, J. P. Seldin (2008)『Lambda-Calculus and Combinators: an Introduction』Cambridge University Press

[5] B. C. Pierce (2002)『Types and Programming Languages』The MIT Press

索引